Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
Secondo compitino 5 giugno 2017 Aula 1A150 ore 9:30

1

Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale x di un sistema di riferimento $Oxyz$ con y verticale ascendente: $\underline{g} = (0, -g, 0)$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ è tesa tra O e P. Il punto P è inoltre estremità di una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza L. Nell'altra estremità della sbarretta è vincolato un punto materiale Q anch'esso di massa m. Considerare quali parametri Lagrangiani x di P e l'angolo φ valutato in senso anti-orario nel semi-spazio $z > 0$, dalla semiretta verticale basata su P, parallela a y e orientata come $-y$, alla semiretta basata su P, e orientata come PQ.
Determinare *esplicitamente* le pulsazioni ω_1 e ω_2 delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.

2

Si consideri la mappa di $\mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$ in sè:

$$\begin{cases} \tilde{q} &= -p, \\ \tilde{p} &= q + A\, p^2, \end{cases}$$

ove $A > 0$. Dimostrare, o confutare, che tale mappa sia una Trasformazione Canonica, di valenza eventualmente da determinarsi.

3

A scelta, tra le due seguenti alternative:

1) Teorema di Routh, enunciato e dimostrazione. Dati due punti materiali di massa m_P e m_S soggetti alla mutua forza gravitazionale Newtoniana (indicare con h la costante di Cavendish), considerare l'applicazione di Routh al problema di Kepler in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e dunque al problema piano $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, riducente infine tale sistema 2-dim. ad uno 1-dim. Fare attenzione all'uso opportuno della massa ridotta.

oppure:

2) Problema della brachistocrona, in dettaglio.

(Facoltativo, ma **solo** dopo aver risposto ai tre quesiti precedenti: Problema delle bolle di sapone (superficie minima) tra due cerchi, con lo stesso asse, di ugual raggio R e distanti tra loro 2ℓ.)

Soluzione di **1**

$$x_P = x, \qquad y_P = 0,$$
$$x_Q = x + L\ \sin\varphi, \qquad y_Q = -L\ \cos\varphi.$$

$$U(x,\varphi) = \frac{h}{2}x^2 - mgL\cos\varphi.$$
$$T(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + L\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (L\sin\varphi\dot{\varphi})^2] =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}2m & mL\cos\varphi\\ mL\cos\varphi & mL^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

Matrice cinetica: $a_{ij}(x,\varphi)$. Equilibri:

$$0 = \tfrac{\partial U}{\partial x} = hx,$$
$$0 = \tfrac{\partial U}{\partial \varphi} = mgL\sin\varphi\ .$$

$\Rightarrow\ (0,0),\ \ (0,\pi)$.

$$\nabla^2 U(x,\varphi) = \begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & mgL\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Si può applicare il teorema dell'Hessiano non-degenere: $\det\nabla^2U(x,\varphi)(0,0) \neq 0, \quad \det\nabla^2U(x,\varphi)(0,\pi)\neq 0,$

$$\det\nabla^2U(x,\varphi)(0,0) \text{ è def. pos.} \Rightarrow\ (0,0)\ \text{ è stabile},$$
$$\det\nabla^2U(x,\varphi)(0,\pi) \text{ non è def. pos.} \Rightarrow\ (0,\pi)\ \text{ è instabile}.$$

En. cinetica di piccola oscill. attorno a $(0,0)$:

$$T^{(0)}(\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}a_{ij}(0,0)\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2m & mL\\ mL & mL^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}.$$

Per le frequenze di piccola oscillazione si deve risolvere:

$$\det\left(\nabla^2U(x,\varphi)(0,0) - \omega^2 a(0,0)\right) = 0,$$
$$\det\begin{pmatrix}h - 2m\omega^2 & -mL\omega^2\\ -mL\omega^2 & mgL - mL^2\omega^2\end{pmatrix} = 0,$$
$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{2mg + hL \pm\sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}.$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2mg + hL + \sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + hL - \sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}}.$$

Soluzione di **2**

Dato che siamo in $\mathbb{R}^2$, è sufficente verificare che la tr. è un diffeom. e che $|\det J| = cost.$, nel nostro caso: $J = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2Ap\end{pmatrix}$

quindi $\det J = 1$ e dato che la mappa è (fatto facilmente verificabile direttamente, farlo!) iniettiva e suriettiva, è effettivamente un diffeom. e dunque è una TC con $c = 1$.

Non è applicabile il teorema di inversione globale legato alla def. pos. uniforme della parte simmetrica dello Jacobiano, che è: $sym\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2Ap\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2Ap\end{pmatrix}$, degenere.